# Kıt Kaynakların Paylaştırılması: Talepler Problemi Literatürü Üzerine Bir İnceleme

Orhan Aygün* Sinan Ertemel† Burak Doğan‡

**Öz**

Bu makale, literatürde “talepler problemi" olarak bilinen, hak sahiplerinin taleplerini karşılamada yetersiz bir kaynağın kaynak üzerindeki iddialar gözetilerek paylaştırılması modelini inceler. Bu modelin miras dağıtımından tayınlamaya, iflas eden şirketin mallarının alacaklılara tahsisinden vergilendirmeye kadar birçok farklı uygulaması bulunur. Makalede, aksiyomatik bir yaklaşım benimsenerek talepler problemine çözüm sunan dağıtım kurallarının matematiksel aksiyom olarak ifade edilen özellikleri irdelenir. Ayrıca, literatürde öne çıkan orantılı kural ve eşitlikçi kurallar gibi dağıtım kuralları aksiyomatik karakterizasyonları ile incelenir. Son olarak, bu çalışma, kıt kaynakların, kaynak üzerinde birbiriyle çelişen, haklı talep sahipleri arasında adil ve hakça dağıtılması konusunda kapsamlı bir çerçeve sunar.

**JEL Kodu**: C71, D63, D81

**Anahtar kelimeler**: Talepler problemi, tayınlama, iflas problemi, miras, vergilendirme, adil dağıtım

*Ekonomi Bölümü, Boğaziçi Üniversitesi, Bebek, 34342 İstanbul, Türkiye, e–mail: orhan.aygun@boun.edu.tr
†Ekonomi Bölümü, İstanbul Teknik Üniversitesi, Maçka, 34367 İstanbul, Türkiye, e–mail: ertemels@itu.edu.tr
‡Ekonomi Bölümü, Bahçeşehir Üniversitesi, 34349 İstanbul, Türkiye, e–mail: burak.dogan@eas.bau.edu.tr

# 1 Giriş

Bir kaynağı, kaynak üzerindeki taleplerinin toplamı kaynaktan daha büyük olan hak sahiplerine dağıtmanın en iyi yolu nedir? Yetersiz kaynağın hak sahiplerine dağıtımı talepler problemi *(claims problem)* olarak bilinir. Problemin çözümü için kaynağın nasıl dağıtılması gerektiğini gösteren dağıtım kuralları kullanılır.

Ele aldığımız modelin gündelik hayata ilişkin birçok uygulaması bulunur. Başlıca uygulamalardan biri miras paylaşımıdır. Bir kişi öldükten sonra geriye kalan mirası borçlarını karşılamaya yetecek düzeyde değilse, müteveffanın terekesinin alacaklılar arasında nasıl dağıtılacağına karar verilmesi gerekir. Miras uyuşmazlıkları, literatürde, tayınlamaya *(rationing)* ilişkin O'Neill (1982) and Rabinovitch (1973) tarafından Babil Talmud'undan alınan meselelerle kayda alınan ilk örneklerdir. Başka bir uygulama olan iflas probleminde, Aumann and Maschler (1985)'ın ele aldığı üzere iflas ederek tasfiye edilen bir şirketin borçlarını karşılamaya yetmeyen varlıkları alacaklılar arasında paylaştırılır.

Modelin bir başka uygulaması, bir tür tayınlama problemi olan bir şirketin yetersiz miktardaki ürününü, ürünün siparişini veren müşteriler arasında paylaştırılması mevzuudur. Bu tayınlama problemi; kıt kaynağın yiyecek, temiz su, sağlık malzemeleri ya da farklı ülke ve bölgeler arasında paylaştırılacak küresel karbon bütçesi olarak tanımlanarak daha büyük ölçeklere de uyarlanmaktadır. Benzer şekilde, uluslararası yardım kuruluşları yoksul bölgelere yardım dağıtırken kıt kaynakların tahsis edilmesi sorunuyla karşı karşıya kalır.

Modelimiz, basit vergilendirme problemleri formel olarak tanımlanırken de kullanılır. Bu durumlarda, iddia sahiplerinin yerini gelirleri toplamı bahsi geçen projenin maliyetini aşan vergi mükellefleri yer alır. Burada sorulması gereken ise Young (1988, 1990) tarafından ele alındığı üzere her bir mükellefin toplam maliyete katkı vermesinin adil ve hakça nasıl sağlanabileceğidir.

Daha genel anlamda, bu model, hak sahiplerinin taleplerini tamamen karşılamakta yetersiz bir kaynağın hak sahipleri arasında paylaştırılması gerektiğinde kullanılabilir.

Bu makalede, aksiyomatik yaklaşım benimsenmiştir. Öncelikle, matematiksel "aksiyomlar" olarak ifade edilen kural özelliklerini inceleyeceğiz. Bu aksiyomlar, bir kuralın farklı durumlarda nasıl işlemesi gerektiği bilgisini ihtiva eder. Aksiyomatik bir çalışma tipik olarak küçük bir aksiyom kümesi üzerinde yoğunlaşır, aksiyomların mantıksal bağlantılarını inceler ve bu aksiyomları farklı kombinasyonlarda uygulamanın sonuçlarını araştırır. Aksiyomatik yaklaşım aracılığıyla elde edilen sonuçlar ikiye ayrılabilir. İlk durumda, belirli aksiyomların birbiriyle uyumsuz olduğu bulunur ve bu durum bir imkansızlık teoremini ortaya çıkarır. İkinci durumda, bir aksiyom listesi uyumlu bulunabilir ve onları karşılayan kurallar ailesi, kuralın aksiyomatik karakterizasyonu olarak adlandırılır. Aksiyomatik yaklaşımın ana hedefi, uyumlu ve uyumsuz aksiyomlar listesi arasındaki sınırları belirlemek ve uyumlu aksiyomların tümünü karşılayan kuralları veya kural ailelerini elde etmektir.[1]

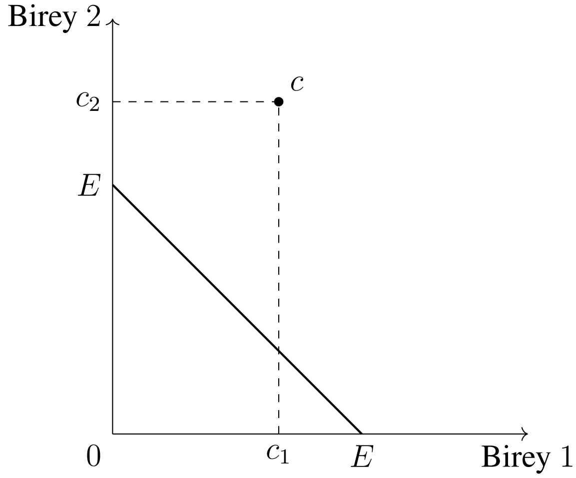
Çalışma şu şekilde organize edilmiştir: 2. Bölümde talepler problemi için önbilgileri sunuyoruz. 3. Bölümde, literatürden çeşitli, iyi bilinen dağıtım kurallarını tartışıyoruz. Ardından, 4. Bölümde, verimlilik, adalet, monotonluk ve değişmezlik gibi önemli özellikleri yansıtan standart aksiyomları tanıtıyor ve 3. Bölümde tartışılan dağıtım kuralları için aksiyomatik karakterizasyonlar sağlıyoruz. Son olarak, 5. Bölümde sonuçları özetliyoruz.

## 2 Önbilgiler

Sınırsız bölünebilen kaynak $E \in \mathbb{R}_+$; $N$ grubunu oluşturan, kaynak üzerinde $c_i \in \mathbb{R}_+$ büyüklüğünde talebi bulunan $i \in N$ bireyleri arasında paylaştırılacaktır. $c = (c_i)_{i \in N}$ vektörü bireylerin taleplerini göstermektedir. Burada, $N$'nin sonlu olduğu ve $\{1, 2, ..., n\}$ şeklinde ifade edilen doğal sayılar kümesinin alt kümesi olduğu varsayılmıştır.

Bir problemi "talepler problemi" olarak tanımlayabilmek için bireylerin talepleri toplamının kaynağın mevcut değerinden fazla olması, $\sum_{i \in N} c_i \geq E$, gerekir. Bu durumda, $(c, E) \in \mathbb{R}^N_+ \times \mathbb{R}_+$ çifti "talepler problemi" olarak anılabilir. Eğer $\mathcal{C}^N$ kümesinin dikkate alınan tüm problemleri içerdiği düşünülürse talepleri arasında $c_1 < c_2$ ilişkisi bulunan iki bireyin bulunduğu talepler problemi Şekil 1'de gösterilmiştir.

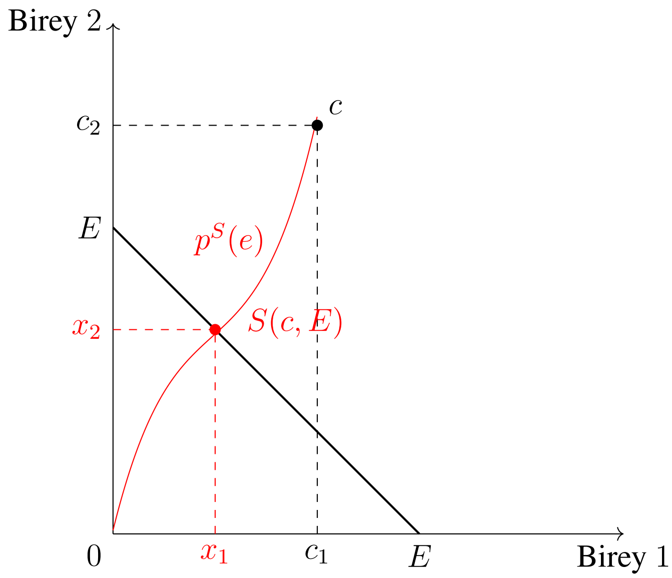
[1] Dağıtım kurallarının aksiyomatik karakterizasyonunu daha derinlemesine araştırmakla ilgilenen okuyucular için Moulin (2002) ve Thomson (2019) tarafından hazırlanan incelemeleri öneriyoruz.




**Şekil 1:** $|N| = 2$ için Talepler Problemi ($c_1 < c_2$ olmak üzere)

Amaç, hak sahiplerinin her birine, talepleri gözetilerek, dağıtılanların toplamı kaynağa eşit olacak şekilde "ödül" *(award)* dağıtan bir çözüm bulmaktır. Hak sahiplerine, negatif olmayan ve materyal değeri taleplerinden büyük olmayan bir ödül verildiği varsayılır. Formel olarak her $(c, E)$ probleminde, talepte bulunan hak sahipleri $0 \leq x \leq c$ sağlanmak üzere[2] ve ödül dağıtımı dengeli, yani, $\sum_{i \in N} x_i = E$ olmak üzere bir $x \in \mathbb{R}^N_+$ vektörü ile ödüllendirilir. Dolayısıyla, bir $(c, E)$ probleminin ödül vektörü $X(c, E)$ ile gösterilir. Bir dağıtım kuralı, her $(c, E)$ problemine bir ödül vektörü atayan bir fonksiyon olarak temsil edilir ve $S$ ile gösterilir. İki bireyin bulunduğu bir problemde, dağıtım kuralı, $S(c, E)$ dağıtım kuralı için $e \in [0, \sum_{i \in N} c_i]$ olan $p^S(e)$ ile ifade edilen ödüller yolu *(path of awards)* aracılığıyla Şekil 2'deki gibi gösterilebilir.

[2] Vektör eşitsizliklerinde, $x > y$ yazdığımızda, bu, $x$'in her bir koordinatının $y$'nin ilgili koordinatından kesinlikle daha büyük olduğu ve $x$ ile $y$'nin eşit olamayacağı anlamına gelir. Diğer taraftan, $x \geq y$ yazdığımızda, bu, $x$'in her bir koordinatının $y$'nin ilgili koordinatına eşit veya ondan daha büyük olduğu ve $x$ ile $y$'nin eşit olabileceği anlamına gelir.




**Şekil 2:** $|N| = 2$ ve $c_1 < c_2$ olmak üzere; $e \in [0, c_1 + c_2]$ olmak üzere $S(c, e)$ Dağıtım Kuralı için $p^S(e)$ şeklinde gösterilen Ödüller Yolu

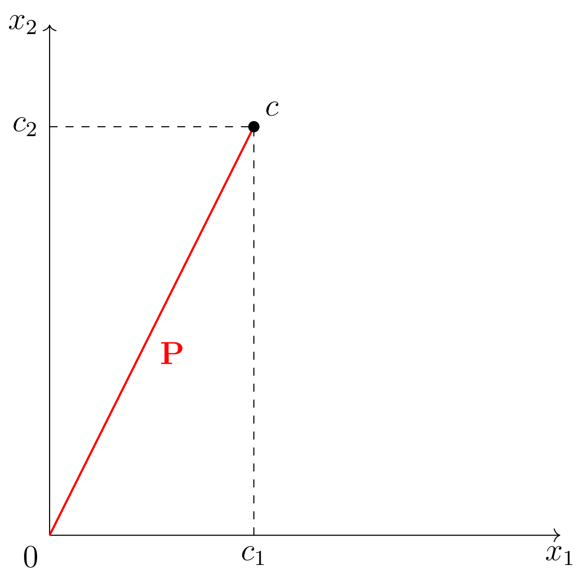
# 3 Dağıtım Kuralları

Bu bölümde, literatürde en öne çıkan dağıtım kuralları gösterilecektir. Bu kuralların aksiyomatik karakterizasyonları 4. bölümde ele alınacaktır.

Orantısallık, tarihin kayıt düştüğü üzere uzun zamandır basit dağıtım problemlerinin çözümünde kullanılan başlıca yöntem olmuştur. Bu kural ile adı sıkça anılan Aristoteles, orantısallığı dağıtıcı adaletin karşılığı olarak tanımlamıştır: "Adil bir eylemde mutlaka dört unsur bulunur: haklarında adaletin tecelli edeceği iki taraf ve adaletin üzerinden sağlanacağı iki pay. Kişiler arasındaki eşitliğin aynı oranda paylar arasında da gözetilmesinin sağlanması ... Bu bağlamda, adil olan orantılı olan iken adaletsiz olan orantılılığı ihlal edendir.

Buna göre, talepler problemi kontekstinde Orantılı (P) Kural, hak sahiplerinin mevcut kaynaktan talepleri doğrultusunda pay almalarını sağlar. Orantılı Kural; Aristoteles'in eşitler birbirine eşit, eşit olmayanlar birbirine eşit olmayacak şekilde muamele görmelidir düsturuna göre kaynakların taleplerin büyüklükleriyle orantılı olacak şekilde dağıtımını sağlar. Böylece, orantılı kural her bireyin sağladığı katkı oranında pay alması yoluyla adalet ve eşitliğin tesisini temin eder.

*Orantılı (P) Kural*: Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ ve $\lambda = \frac{c}{\sum_{i \in N} c_i}$ olmak üzere $P(c, E) = \lambda E$.



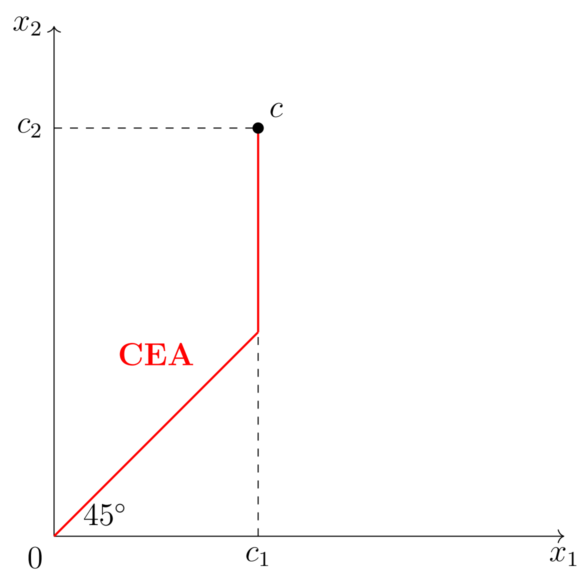

**Şekil 3:** Orantılı Kural için Ödüller Yolu ($c_1 < c_2$ olmak üzere)

Orantılı Kural bir eşit dağıtım yöntemi olarak görülebilir. Özellikle birbiriyle çelişen iddiaların bulunduğu uyuşmazlıklarda, orantılı dağıtım, birimleri kimin talep ettiğinden ve birimlerin kimlere dağıtıldığından bağımsız olarak talep edilen tüm birimlerin eşitliğini gözetir. Böylece, her talep eden kendisi için ayrılan birimler karşılığınca ödüllendirilir.

Talep edilen birim esasına dayanan eşit dağıtım anlayışından mutlak anlamda eşitliği sağlayan kurallara geçiyoruz. Sıradaki kural, sınırlandırılmış eşit ödüller *(constrained equal awards)* kuralı, hak sahiplerinin talep ettiklerinden fazlasını almamaları koşuluyla kaynaktan eşit olarak istifade etmelerini temin eder. İbn Meymun'un *(Maimonides)* da içinde bulunduğu birçok ortaçağ düşünürü bu kuralı savunmuştur.

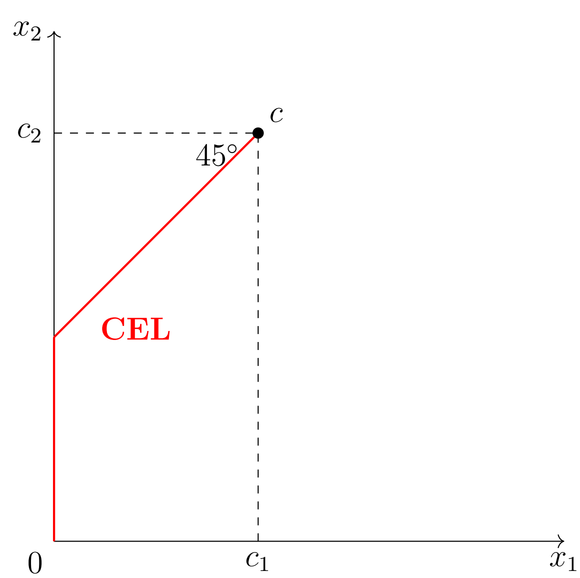
*Sınırlandırılmış Eşit Ödüller (CEA) Kuralı*: Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ ve $\lambda \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere ve $\sum_{i \in N} min\{c_i, \lambda\} = E$ eşitliği sağlanmak üzere $CEA(c, E) = (min\{c_i, \lambda\})_{i \in N}$.

Sıradaki kural mutlak eşitlikçi yaklaşımı gereği kıstılı eşit kazançlar kuralı ile benzerlikler gösterir. Ancak eşit kazançlar kuralı ödüllerin eşit olmasını öncelerken sınırlandırılmış eşit kayıplar *(constrained equal losses)* kuralında, talepte bulunanların yaşadıkları kayıplardaki eşitlik dikkate alınır. Bu kural hak sahiplerinin talepleriyle aldıkları ödüller arasındaki "kaybın" olabildiğince eşit olmasını hiç kimsenin negatif ödül almaması koşuluyla sağlar. Bu kurala da İbn Meymun'un yazılarında rastlanmıştır.




**Şekil 4:** CEA Kuralı için Ödüller Yolu ($c_1 < c_2$ olmak üzere)

*Sınırlandırılmış Eşit Kayıplar (CEL) Kuralı*: Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ ve $\lambda \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere ve $\sum_{i \in N} max\{c_i - \lambda, 0\} = E$ eşitliği sağlanmak üzere $CEL(c, E) = (max\{c_i - \lambda, 0\})_{i \in N}$.



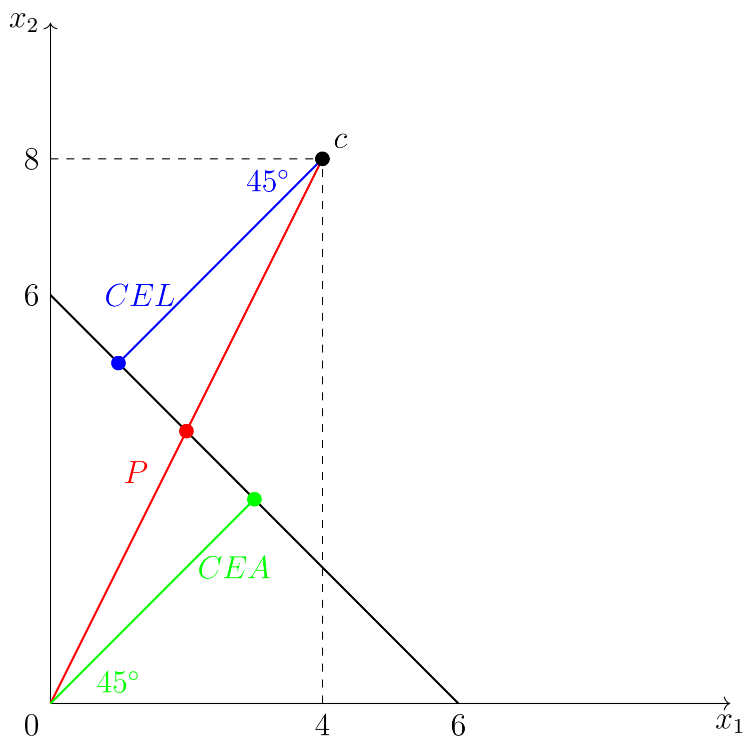

**Şekil 5:** CEL Kuralı için Ödüller Yolu ($c_1 < c_2$ olmak üzere)

CEA ve CEL Kuralları sırasıyla hak sahiplerinin aldıkları ödülleri $x_i$ ve maruz kaldıkları kayıpları $(c_i - x_i)$ dağıtım kuralındaki kısıta aykırı davranmadan eşitlemeyi hedefler. $CEA(c, E)$'nin sağladığı benzersiz çözüm; leksikografi gereği $x_i$'deki en küçük koordinata karşılık gelen (*leksimin*) ödülü maksimize eden, daha sonra en küçük ikinci koordinata karşılık gelen ödülü maksimize eden, ve bu şekilde ödül maksimizasyonuna devam eden çözüm olarak ifade edilebilir.[3] Böylelikle, $CEL(c, E)$'in kayıplar vektörü $(c_i - x_i)$'ye uygulanan "leksimin" sıralamasının yegane maksimize edeni olduğu söylenebilir.

**Örnek.** Yukarıda bahsi geçen üç temel kuralı daha iyi izah etmek adına bir örneğe başvuralım. İflas ederek sona erip geriye $E = 6$ değerinde toplam varlığı kalmış bir şirketin olduğu bir iflas problemini düşünelim. 1 sayılı hak sahibinin $c_1 = 4$ büyüklüğünde ve 2 sayılı hak sahibinin $c_2 = 8$ büyüklüğünde talepleri olduğunu varsayalım. Orantılı urala göre toplam varlık taleplerin büyüklüğü oranında hak sahiplerine dağıtılır, bu da her bir hak sahibinin talebinin yarısı kadarını ödül olarak alması anlamına gelir. Bu durumda, 1. hak sahibi $x_1 = 2$ ve 2. hak sahibi $x_2 = 4$ alacaktır. Öte yandan, CEA Kuralı gereği, ödüller hiçbir hak sahibinin negatif ödül almaması koşuluyla eşitlenir. Bu durumda, hak sahipleri $x_1 = x_2 = 3$ alacaktır. Son olarak, CEL Kuralı gereği, hiçbir hak sahibi talebinden fazlasını almaması koşuluyla kayıplar eşitlenecektir. Bu durumda, 1 sayılı hak sahibi $x_1 = 1$ ve 2 sayılı hak sahibi $x_2 = 5$ alacaktır.

Şekil 6'da yukarıdaki örneğe göre belirlenen P, CEA ve CEL kuralları için ödüller yolları verilmiştir.

[3] Leksikografik sıralamayı formel olarak tanımlamak gerekirse; $x, y \in \mathbb{R}^n$ kabul edelim. $x, y$ koordinatlarının artan sırayla yeniden düzenlenmesiyle $x^*, y^* \in \mathbb{R}^n$ elde edilsin. Eğer $x^* = y^*$ ise, $x$ ve $y$'nin leksimin sıralamasına göre birbirine denk olduğunu söyleriz. Eğer $i = 1, 2, \ldots, m$ için $x_i^* = y_i^*$ ise ve $m = 0, 1, \ldots, n-1$ tam sayısı için $x_{m+1}^* > y_{m+1}^*$ ise leksimin sıralamasına göre $x$'in $y$'ye tercih edileceğini söyleriz.




**Şekil 6:** P, CEA ve CEL kuralları için $E = 6, c_1 = 4, c_2 = 8$ olmak üzere Ödüller Yolları

Genellikle çekişmeli kumaş *(contested garment)* problemi olarak adlandırılan uyuşmazlığın kaynağı, iki kişinin, bir kumaş parçası üzerinde birbiriyle çelişen mülkiyet iddiasında bulunmasıdır. Uyuşmazlığın esası mülkiyet iddiaları ışığında kumaşın, değeri de gözetilerek iki kişi arasında adil bir şekilde nasıl paylaştırılacağıdır. Talmud'da uyuşmazlık ve çözümü şu şekilde yer bulmuştur: "İki kişi bir kumaşı tutar... Eğer biri, "Hepsi benim" der ve diğeri "Yarısı benim" derse, ... ilki üç çeyrek alır ve ikincisi bir çeyrek alır." [4]

Kuralı formel olarak tanımlamak gerekirse, $i$ ve $j$ ile gösterilen iki talep sahibinin bulunduğu bir durumda, taleplerin sırasıyla $c_i$ ve $c_j$ olduğunu varsayalım. Kuralın temel gerekçesi, talep sahiplerinden birinin belirli bir miktarda talepte bulunması durumunda talepte bulunmadığı kısımdan vazgeçtiği, bu kısmı diğer talep sahibine bıraktığı kabulüdür. Eğer $E - c_i$ negatif değilse ve talep sahibi $i$ talep sahibi $j$ lehine $E - c_i$ miktarında bir kaynak kısmından *bu kaynak kısmı üzerinde talepte bulunmayarak* vazgeçer ve eğer $E - c_i$ negatifse talep sahibi $i$ talep sahibi $j$ lehine olacak şekilde herhangi bir kaynak kısmından vazgeçmez. Benzer şekilde, eğer $E - c_j$ negatif değilse ve talep sahibi $j$ talep sahibi $i$ lehine $E - c_j$ miktarında bir kaynak kısmından *bu kaynak kısmı*

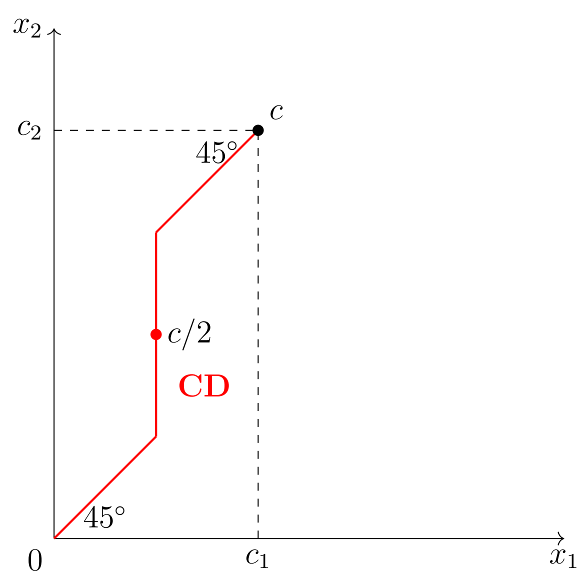
[4] bkz. Baba Metzia, Babil Talmudu I. Talmud'un ilgili bölümlerine atıfta bulunan ikincil literatür için O'Neill, 1982, Aumann and Maschler, 1985 ve Dagan, 1996 eserlerine başvurulmuştur.

*üzerinde talepte bulunmayarak* vazgeçer ve eğer $E - c_j$ negatifse talep sahibi $j$ talep sahibi $i$ lehine olacak şekilde herhangi bir kaynak kısmından vazgeçmez.

Bahşet-ve-böl *(concede-and-divide)* adı verilen kuralın ilk uygulama adımında her bir talep edene diğer talep eden tarafından kaynak üzerinde iddia edilmemiş, vazgeçilmiş kısım ödül olarak verilir. İkinci uygulama adımında, kaynağın kalan kısmı talep edenlere eşit olarak dağıtılır.

*Bahşet-ve-böl (CD) Kuralı*: $|N| = 2$ olmak üzere Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ için

$$CD(c, E) = \{\max(E - c_j, 0) + \frac{E - \max(E-c_j,0) - \max(E-c_i,0)}{2}\}_{i \in N}.$$




**Şekil 7:** CD Kuralı için Ödüller Yolu ($c_1 < c_2$ olmak üzere)

CD Kuralının ikiden daha fazla sayıda talep edenin olduğu durumlar için bir çeşit genellemesi niteliğinde olan kuralı tanıtacağız. Aumann and Maschler (1985) *Talmud Kuralını*, Talmud'taki ilgili uyuşmazlıklara çözüm sunan kuralları üçten fazla kişi olduğu durumlara uyarlayarak tanımlamıştır. Her ne kadar aslen Talmud böyle durumlar için çözüm sunmasa da, yazar kuralın gerekçesini ortaya çıkarmıştır. Yazar, ayrıca, kuralın Talmud'ta geçen çekişmeli kumaş problemine ve üç eş *(three wives)* problemine sunduğu çözümlerin Talmud'ta verilen çözümlerle aynı olduğunu da göstermiştir.[5] Talmud Kuralını formel olarak tanımlamak gerekirse; kural,

[5] Haham Nathan tarafından Kethubot 93a'da aktarıldığı üzere: Eğer üç karısı olan bir erkek ölür ve birinci eşin ketubasının bir maneh (100 zuz), ikincinin iki yüz zuz ve üçüncünün üç yüz zuz olduğu ve mirasın (değerinin)

taleplerin toplamının yarısının kaynağa eşit veya kaynaktan daha büyük olduğu hallerde CEA Kuralını uygulamakta diğer durumlarda ise CEL kuralını uygulamaktadır.

*Talmud (T) Kuralı*: Her$(c, E) \in \mathcal{C}^N$ ve $i \in N$ için

$$T_i(c,E) = \begin{cases} min\{\frac{c_i}{2}, \lambda\}, & \text{eğer } E \leq \sum_{i \in N} \frac{c_i}{2} \\ c_i - min\{\frac{c_i}{2}, \lambda\}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}_+$ ve $\sum_{i \in N} T_i(c, E) = E$ olmak üzere.

# 4 Karakterizasyonlar

Bu bölümde bir önceki bölümde tanıtılmış kuralların aksiyomatik karakterizasyonuna yer verilmiştir. Ele alacağımız ilk aksiyom seti, beraber bir kuralı tanımlayan aksiyomlar olan *negatif olmama (non-negativity)*, *denge (balance)* ve *taleple sınırlılıktan (claim boundedness)* oluşmaktadır.

İlk aksiyom, problemlerde kaynağın tamamının tahsis edilmesini temin eder.

*Denge*: Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$olmak üzere $\sum_{i \in N} S_i(c, E) = E$.

Sıradaki aksiyom talep sahiplerinin negatif değerli ödül almamasını sağlar.

*Negatif olmama*: Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ olmak üzere her$i \in N$ için $S_i(c, E) \geq 0$.

Sıradaki aksiyom hiçbir talep edenin talebinden fazlasını alamayacağı şekilde bir üst sınır belirler.

*Taleple sınırlılık*: Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ olmak üzere her $i \in N$ için $S_i(c, E) \leq c_i$.

sadece bir maneh (yüz zuz) olduğu anlaşılırsa, miras eşlere eşit olarak pay edilir. Eğer mirasın (değerinin) iki yüz zuz olduğu anlaşılırsa, (bir maneh (yüz zuz) talep eden) elli zuz alır (ve sırasıyla iki yüz ve üç yüz zuz talep edenlerin her biri üç altın denari (yetmiş beş zuz) alır. Eğer mirasın (değerinin) üç yüz zuz olduğu ortaya çıkarsa, bir maneh talep eden elli zuz ve iki yüz zuz talep eden bir maneh (yüz zuz) alırken, üç yüz zuz talep eden altı altın denari (yüz elli zuz) alır. Benzer şekilde, eğer üç kişi ortak bir fona katkıda bulundularsa ve zarar veya kararları olduysa, fondan kalanı aynı şekilde paylaşırlar.

Yukarıda verilen her üç aksiyom da karakterizasyonlarda başlıca başvuru kaynağıdır ve talepler problemi bağlamında iflas ve miras uyuşmazlıkları gibi uyuşmazlıklarla oldukça uyumludur.
Bu bölümde tartışılan aksiyomlar, adil paylaşım teorisindeki temel bir fikirle ilgilidir. Bu, benzer özelliklere sahip bireylerin eşit şekilde muamele görmesi gerektiği hususudur. Ancak, bireyler modelde hesaba katılmayan boyutlarda farklılaşırsa, eşitsiz muamele gereği ortaya çıkabilir. 3. Bölümde tanımlanan tüm kuralların bu aksiyomu sağladığını unutmayalım.

*Eşitlere eşit muamele (equal treatment of equals)*: Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ olmak üzere her $\{i, j\} \subseteq N$ için, eğer $c_i = c_j$ ise $S_i(c, E) = S_j(c, E)$.

Sıradaki aksiyom talep edenlerin ödülleri için bir alt sınır belirler. Bu alt sınır, kaynaktan taleplerin toplamı çıkarılarak belirlenir. Eğer bu fark negatif olarak bulunursa bulunan değer yerine 0 (sıfır) dikkate alınır. Formel olarak göstermek gerekirse, $m_i(c, E) = \max\{E - \sum_{j \neq i} c_j, 0\}$ $i$ sayılı bireyin asgari hakkını temsil eder. Aksiyom gereği, her talep edenin ödül olarak asgari hak olarak tanımlanan payı alması sağlanır.[6]

*Asgari hakların alt sınırı (the minimal rights lower bounds):* Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ olmak üzere, her $i \in N$ için $S_i(c, E) \geq m_i(c, E)$.

Sıradaki aksiyomu sağlayan bir kurala göre ödül vektörü doğrudan ya da iki aşamalı olarak hesaplanabilir. Aksiyomu sağlayan kural gereği, ilk adımda, talep edenlere asgari hakları dağıtılır. İkinci adımda, kural gereği dağıtım kaynakta kalan meblağ ve taleplerden asgari haklar çıkarılarak taleplerin revize edilmesi üzerinden hesaplanarak dağıtılır.

*Asgari hakların önceliği (minimal rights first:* Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ olmak üzere $S(c, E) = m(c, E) + S(c - m(c, E), E - \sum_{i \in N} m_i(c, E))$.

Sıradaki aksiyom, taleplerdeki tenzilin ödül vektöründe bir değişiklik yaratmayacağını temin eden bir istikrar aksiyomudur. Formel olarak ifade etmek gerekirse, $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ için, birey $i$'nin tenzil edilmiş talebini $t_i(c, E) = \min\{c_i, E\}$ ile belirtelim.[7]

[6] Asgari hakların alt sınırı aksiyomu bir kural tanımının ayrılmaz parçaları olan denge, negatif olmama ve taleple sınırlılık aksiyomlarını sağlayan tüm kurallar tarafından sağlanır.

[7] Tenzil kavramı ilk olarak Aumann and Maschler (1985) tarafından sunulmuştur. Talepleri tenzilde istikrar *(claims truncation invariance)* Curiel et al. (1987) tarafından ortaya konmuş ve Dagan and Volij (1993) tarafından

*Talepleri tenzilde istikrar:* Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ için $S(c, E) = S(t(c, E), E)$.

Kaynakta yapılan değişikliklerle ilgili iki istikrar aksiyomu daha tanıtacağız. İlki, kaynağın azaldığı durumlarla ilgili "aşağı yönlü bütünlük" *(composition down)* aksiyomu. Bu durumlarda, kaynağın tahsisi için iki ayrı yaklaşım benimsenebilir: başta yapılan dağıtımı iptal ederek dağıtım kuralı gereği tahsisi tekrar yapmak ya da başta yapılan dağıtımı bozmadan dağıtım kuralı gereği tahsisi revize etmek. Aşağı yönlü bütünlük aksiyomu gereği her iki yaklaşım da aynı sonucu verir.[8]

*Aşağı yönlü bütünlük:* Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ için $E' < E$ olmak üzere $S(c, E') = S(S(c, E), E')$ eşitliği sağlanır.

Yukarıda ele aldığımız durumun tersi olarak ifade edilebilecek kaynağın arttığı hallerle ilgili "yukarı yönlü bütünlük" *(composition up)* aksiyomunu tanıtacağız. Aksiyomun tatbiki için yine iki ayrı seçeneğe başvuracağız. İlk seçenekte başlangıçta yapılan tahsis iptal edilerek dağıtım kuralı gereği olması gerektiği gibi tahsis yapılacaktır. İkinci seçenekte ise başta yapılan tahsis iptal edilmeden dağıtım kuralı gereği, başlangıçta tahsis edilen ödüller revize edilecektir. Daha önce olduğu gibi, burada da aksiyom gereği her iki seçenekte yapılan taksimatlar birbirine eş olacaktır.[9]

*Yukarı yönlü bütünlük:* Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ için $E' > E$ ve $\sum_{i \in N} c_i \geq E'$ olmak üzere $S(c, E') = S(S(c, E), E')$.

Aksiyomatik karakterizasyona başlamadan önce talepler problemi bağlamında *düalite (duality)* kavramının öneminden bahsetmek gerekir. Bir talepler problemi iki farklı bakış açısıyla ele alınabilir. Birincisi mevcut olanı incelemenin merkezine alırken ikincisi noksana, olmayana odaklanır. Bu iki yaklaşım arasındaki simetri, sınırlandırılmış eşit ödüller ve sınırlandırılmış eşit kayıplar gibi kuralları tanımlarken belirginleşir. Bu simetri aşağı ve yukarı sınırlara, ve iki bütünlük aksiyomuna da esas oluşturur. Ödülün kayba eşit olduğu aynı talep vektörlerine sahip iki problemi düal olarak tanımlarız.

formel olarak bir aksiyom olarak önerilmiştir.

[8] Literatürde ilk defa Moulin (1987) bu aksiyomu fazlalık paylaşımı problemleri için "sabit izlek" adıyla ortaya koymuş, daha sonra Moulin (2000) aksiyomu tanımlarken "üst bütünlük" tabirini kullanmıştır.

[9] Literatürde aksiyomu ilk defa Young (1988) vergilendirme bağlamında bütünlük aksiyomu adıyla tanıtırken Moulin (2000) alt bütünlük adıyla tanımlamıştır.

*Bir Kuralın Düali* $S = S^d$*:* Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ için $S^d(c, E) = c - S(c, \sum_{i \in N} c_i - E)$.

Sınırlandırılmış eşit ödüller (CEA) ve sınırlandırılmış eşit kayıplar (CEL) kuralları birbirine düal kurallardır. Bir kural düali kendisine eş ise *öz-düal (self-duality)* olarak tanımlanır ($S^d = S$). Geometrik bir perspektiften bakıldığında, öz-düaliteye, ödüller yolunun taleplerin yarısına karşılık gelen noktaya göre simetrik olma özelliği denilebilir. Orantılı kural ve Talmud kuralının öz-düal olduğunu belirtmek gerekir.

Düalite kavramı kural-aksiyom bağlamında da ele alınabilir. Bu minvalde, iki aksiyom birbirinin düali ise bir kural bu iki aksiyomdan birini sağlarsa, kuralın düali de aksiyomun düalini sağlar. Kaydadeğer olarak, negatif olmama ve taleple sınırlılık aksiyomları birbirinin düalidir. Benzer şekilde, tenzilde istikrar ve asgari hakların önceliği aksiyomları da birbirinin düalidir. Yine aşağı yönlü bütünlük ve yukarı yönlü bütünlük aksiyomları da birbirlerine düaldir. Öte yandan bir aksiyom eğer kendi düaline eş ise bu aksiyom öz-düal olarak anılır. Örneğin, eşitlere eşit muamele aksiyomu öz-düal bir aksiyomdur.

Literatürde Dagan (1996) karakterize ettiği üzere sınırlandırılmış eşit ödüller (CEA) kuralının karakterizasyonu ile başlıyoruz.

**Teorem 1.** *Sınırlandırılmış eşit ödüller (CEA) kuralı eşitlere eşit muamele, talepleri tenzilde istikrar ve yukarı yönlü bütünlük aksiyomlarını karşılayan yegane kuraldır.*

Sıradaki karakterizasyon teoremi bir önceki teoremin düali mahiyetindedir. Bu teoremde, önceki teoremdeki kural ve aksiyomların düallerini kullanıyoruz.

**Teorem 2.** *Sınırlandırılmış eşit kayıplar (CEL) kuralı eşitlere eşit muamele, asgari hakların önceliği ve aşağı yönlü bütünlük aksiyomlarını karşılayan yegane kuraldır.*

Sırada, öz-düal bir kural olan bahşet-ve-böl (CD) kuralının karakterizasyonu var. Bu kural, CEA ve CEL kurallarının oluşan karma bir kuraldır. Karakterizasyona Dagan (1996)'da yer verilir.

**Teorem 3.** *Bahşet-ve-böl (CD) kuralı eşitlere eşit muamele, asgari hakların önceliği ve talepleri tenzilde istikrar aksiyomlarını karşılayan yegane kuraldır.*

Bahşet-ve-böl (CD) kuralı asgari hakların önceliği ve öz-düallik aksiyom kümesi ile de karakterize edilir. Ek olarak, düaliteyi aracılığıyla karakterizasyon talepleri tenzilde istikrar ve öz-düallik aksiyomları ile de yapılabilir.

Son olarak orantılı kuralın bazı karakterizasyonlarını aktaracağız. İlk olarak Young (1988)'de anılan karakterizasyonu göstereceğiz.

**Teorem 4.** *Orantılı (P) kural yukarı yönlü bütünlük ve öz-düallik aksiyomlarını karşılayan yegane kuraldır.*

Ayrıca, düalite uygulaması ile orantılı kuralın karakterizasyonu aşağı yönlü bütünlük ve öz-düallik aksiyomları ile yapılabilir.

Orantılı kuralın bir sonraki karakterizasyonu, bir grup bireyin taleplerini kendi aralarında aktardığı bir istikrar aksiyomuna dayanır. Formülünden de anlaşılacağı gibi orantılı kural, her birey için göreceli kazançları eşitlemeyi amaçlar. Sonuç olarak, orantılı kurala göre hiçbir birey grubu, taleplerini grup içinde yeniden dağıtarak bir avantaj elde edemez. Bu nosyon, kısmen lineer faydalarla sosyal seçim çerçevesinde, Moulin (1985) tarafından tanımlanan *iltimas sağlayan aktarım yasağı (no advantageous transfer)* aksiyomu ile formel hale getirilebilir. Bu aksiyom, tek başına, orantılı kuralı benzersiz bir şekilde karakterize eder.

*İltimas sağlayan aktarım yasağı*: Her $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ için ve her $M \subseteq N$ için ve her $(c'_i)_{i\in M} \in \mathbb{R}^M_+$ için, eğer $\sum_{i\in M} c'_i = \sum_{i\in M} c_i$ ise $\sum_{i\in M} S_i((c'_i)_{i\in M}, c_{N\setminus M}, E) = \sum_{i\in M} S_i(c, E)$ sağlanır.

**Teorem 5.** $|N| > 2$ *için orantılı kural iltimas sağlayan aktarım yasağını sağlayan yegane kuraldır.*

## 5 Sonuç

Talepler problemi; miras paylaşımı, iflas problemi, tayınlama ve vergilendirme gibi gerçek hayatta karşılaşılan pek çok uygulaması olan bir problemdir. Kaynakların birbiriyle çelişen iddiaları bulunan hak sahipleri arasında dağıtımı; verimlilik, adillik, biteviyelik *(monotonicity)* ve istikrarlılık *(invariance)* gibi önemli özellikleri ihtiva eden aksiyomlar kümesine dayanarak belirlenen bir dağıtım kuralının tatbikini gerektirir.

Bu makalede, literatürden önde gelen çeşitli dağıtım kurallarının bir incelemesini sunduk ve bu kurallar için aksiyomatik karakterizasyonlar sağladık. Aksiyomatik yaklaşım, farklı aksiyomlar arasındaki mantıksal bağıntıları irdelememize ve hangi kuralların veya kural sınıflarının tüm aksiyomları karşıladığına dair kapsamlı bilgi elde etmemize olanak sağladı.

Özetle, talepler problemi, ekonomistlerin, matematikçilerin ve bilgisayar bilimcilerinin dikkatini çekmeye devam eden devingen bir araştırma alanıdır. Aksiyomatik yaklaşım, bu problemi incelemek için değerli bir araç olmuştur ve umarız ki bu inceleme, bu yaklaşım ve dağıtım kuralları değerlendirmeleri için yararlı olacak bir giriş sağlamıştır.

## References


Aumann, R. J., & Maschler, M. (1985). Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the talmud. *Journal of Economic Theory*, *36*(2), 195–213.

Curiel, I. J., Maschler, M., & Tijs, S. H. (1987). Bankruptcy games. *Zeitschrift für operations research*, *31*, A143–A159.

Dagan, N. (1996). New characterizations of old bankruptcy rules. *Social Choice and Welfare*, *13*(1), 51–59.

Dagan, N., & Volij, O. (1993). The bankruptcy problem: A cooperative bargaining approach. *Mathematical Social Sciences*, *26*(3), 287–297.

Moulin, H. (1987). Equal or proportional division of a surplus, and other methods. *International Journal of Game Theory*, *16*(3), 161–186.

Moulin, H. (2000). Priority rules and other asymmetric rationing methods. *Econometrica*, *68*(3), 643–684.

Moulin, H. (1985). Egalitarianism and utilitarianism in quasi-linear bargaining. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 49–67.

Moulin, H. (2002). Axiomatic cost and surplus sharing. *Handbook of Social Choice and Welfare*, *1*, 289–357.

O'Neill, B. (1982). A problem of rights arbitration from the talmud. *Mathematical Social Sciences*, *2*(4), 345–371.

Rabinovitch, N. L. (1973). Probability and statistical inference in ancient and medieval jewish literature. In *Probability and statistical inference in ancient and medieval jewish literature*. University of Toronto Press.

Thomson, W. (2019). *How to divide when there isn't enough*. Cambridge University Press.

Young, H. P. (1988). Distributive justice in taxation. *Journal of Economic Theory*, *44*(2), 321–335.

Young, H. P. (1990). Progressive taxation and equal sacrifice. *The American Economic Review*, *80*(1), 253–266.